

Nachrichtenübertragung - Softwarepraktikum
Termin 14:00 Uhr - 15:45 Uhr
Protokoll Nr. 3

Gruppe "sw06c"

Tilman Knebel (Matr. Nr: 195298)
<tilman@cs.tu-berlin.de>

Christian Richter (Matr. Nr: 192548)
<richterc@cs.tu-berlin.de>

3. Juni 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Übungsblatt 5 – Amplitudenmodulation	1
1.1	Vorbereitungsaufgaben	1
1.1.1	Übertragungsfunktion eines idealen Tiefpaßfilters	1
1.1.2	Impulsantwort	2
1.1.3	Nullstellen und Verlauf der Impulsantwort	2
1.1.4	Grenzfrequenz des Tiefpaßfilters	3
1.1.5	Übergangsbereich beim Tiefpaßfilter	4
1.2	Übungsaufgaben	4
1.2.1	Modulation	4
	Nachrichten- und Trägersignal erstellen	4
	Amplitudenmodulation	6
1.2.2	Demodulation	7
	Synchrone Demodulation	7
	Tiefpaßfilterung I – Rechteck-Fenster	10
	Tiefpaßfilterung II (Hanning-Fenster)	13
	Asynchrone Demodulation	13
2	Übungsblatt 6 – Frequenzmodulation	18
2.1	Vorbereitungsaufgaben	18
2.1.1	Frequenzänderungskonstante des VCO berechnen	18
2.1.2	Signalverläufe	18
2.2	Übungsaufgaben	21
2.2.1	Modulation	21

	Signale erzeugen	21
	Phasenverlauf des Nachrichtensignals	21
	Frequenzmodulation	22
2.2.2	Demodulation	25
	PFM-Wandlung	25
	Tiefpaßfilter erzeugen	27
	Signal filtern	27

Zusammenfassung

Eine reine Basisbandübertragung ist in vielen Kanälen nicht möglich, da zum Beispiel keine Gleichspannungsanteile übertragen bzw. akzeptable Dämpfungen erst in höheren Frequenzbereichen erreicht werden. Auch für die drahtlose (Funk-) Übertragung von Nachrichtensignalen reichen die meist sehr geringen Frequenzen im Basisband nicht aus, da sich die Hertzchen Wellen bei sehr geringen Frequenzen nur sehr schlecht vom Antennendipol ablösen bzw. sehr lange Antennen ($l \approx \lambda/2$) vonnöten wären.

Für diese Anwendungen wird das Nachrichtensignal auf ein höherfrequentes Trägersignal aufmoduliert und damit in einen höheren Frequenzbereich verschoben. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten. Im fünften Übungsblatt (Kapitel 1) werden wir uns mit der Amplitudenmodulation beschäftigen, während wir im sechsten Übungsblatt (Kapitel 2) genauer auf die Frequenzmodulation eingehen.

Kapitel 1

Übungsblatt 5 – Amplitudenmodulation

Bei der Amplitudenmodulation wird die Signalamplitude des Trägersignals $c(t)$ durch das Nachrichtensignal $u(t)$ geformt. Mathematisch entspricht so eine Modulation einer Multiplikation der beiden Signale.

$$u_m(t) = u(t) \cdot c(t)$$

Im Frequenzbereich entspricht das einer Faltung mit einem Deltapuls bei der Modulationsfrequenz, so daß der Spektralbereich des Nachrichtensignals um die Trägerfrequenz verschoben wird.

$$U_m = U * C$$

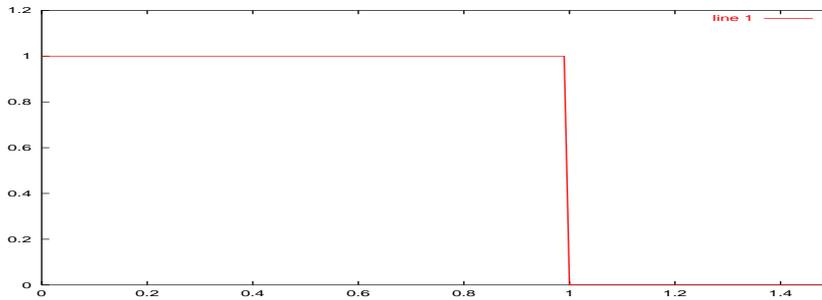
Bei der Demodulation wird noch einmal mit dem Trägersignal gefaltet, wobei der Trägerfrequenzbereich mit dem Nutzsignal einerseits in den Ursprungsbereich zurückgeschoben wird, andererseits aber auch eine Kopie des Trägerfrequenzbereichs um die doppelte Trägerfrequenz herum entsteht. Im Idealfall wird die Demodulation mit derselben Frequenz und Phase, die bei der Modulation verwendet wurde, durchgeführt (synchrone oder kohärente Demodulation). Um das wiederhergestellte Nachrichtensignal von dieser hochfrequenten Kopie zu befreien, wird eine Tiefpassfilterung durchgeführt.

1.1 Vorbereitungsaufgaben

1.1.1 Übertragungsfunktion eines idealen Tiefpaßfilters

Die Übertragungsfunktion eines idealen Tiefpaßfilters ist in Bild 1.1 dargestellt.

Abbildung 1.1: Betragsspektrum eines idealen Tiefpaßfilters



1.1.2 Impulsantwort

Die Impulsantwort ergibt sich, wie im Folgenden dargestellt, aus der Fouriertransformierten der Übertragungsfunktion des idealen Tiefpassfilters:

$$\begin{aligned}
 h_{0tp}(n) &= \mathcal{F}\{H(\Omega)\}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{0tp}(\Omega) e^{jn\Omega} d\Omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_g}^{\Omega_g} e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(n\Omega)}{n} - j \frac{\cos(n\Omega)}{n} \right]_{-\Omega_g}^{\Omega_g} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(n\Omega_g)}{n} + \frac{\sin(n\Omega_g)}{n} - j \frac{\cos(n\Omega_g)}{n} + j \frac{\cos(n\Omega_g)}{n} \right] \\
 &= \frac{\Omega_g}{\pi} \cdot \frac{\sin(n\Omega_g)}{n\Omega_g} = \frac{\Omega_g}{\pi} \cdot \text{si}(\Omega_g n)
 \end{aligned}$$

Wie man sieht, ergibt sich als Impulsantwort eine unendlich ausgedehnte Si-Funktion.

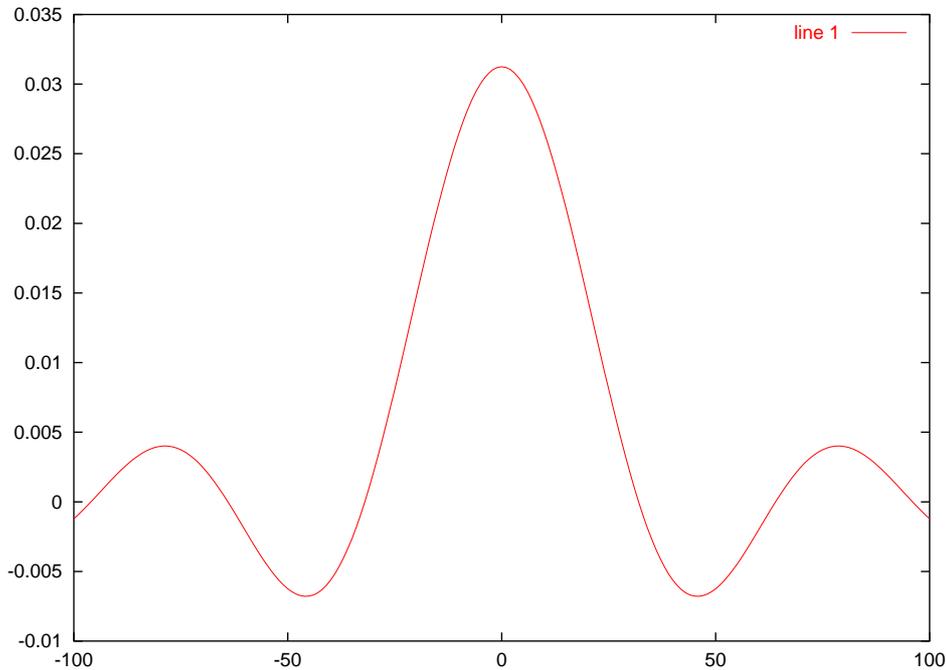
1.1.3 Nullstellen und Verlauf der Impulsantwort

Die Nullstellen der Impulsantwort werden bis auf den Punkt $n = 0$ durch die periodische Sinusfunktion bestimmt:

$$n_0 \cdot \Omega_g = k \cdot \pi \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\Leftrightarrow n_0 = \frac{k\pi}{\Omega_g} \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Abbildung 1.2: Impulsantwort $h_{otp}(n)$



Im Folgenden soll eine Grenzfrequenz von $\Omega_g = \frac{2\pi}{64}$ verwendet werden. Es ergeben sich Nullstellen bei:

$$n_0 = 32 \cdot k \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Der Verlauf der Impulsantwort ist in Bild 1.2 ausschnittsweise skizziert.

Die Nullstellen liegen also bei ganzzahligen Vielfachen der Periodendauer der TP-Grenzfrequenz, ausser Null.

1.1.4 Grenzfrequenz des Tiefpaßfilters

Die Grenzfrequenz Ω_g entspricht einer Frequenz von $f_g = \frac{f_{abtast} \cdot \Omega_g}{2\pi} = 1000 \text{ Hz}$. Diese Frequenz muß zwischen oberer Grenzfrequenz des Basisbandes B_{BB} und dem Doppelten der Modulationsfrequenz f_m abzüglich der Basisbandbreite (siehe Gleichung 1.1) liegen, da in diesem Bereich nach der Demodulation im Idealfall keine Signale vorhanden sind. Das Ziel der Tiefpaßfilterung ist, die entstehende Spiegelung des Nachrichtenspektrums um die doppelte Trägerfrequenz herum wegzufiltern und nur die rekonstruierten Spektralanteile im Basisband durchzulassen.

$$B_{BB} \leq f_g \leq 2f_m - B_{BB} \quad (1.1)$$

Diese Forderung für die Grenzfrequenz gilt jedoch nur für ideale Filter ohne Übergangsbereich und für synchrone Demodulation.

1.1.5 Übergangsbereich beim Tiefpaßfilter

In der Praxis kann ein Rechteckfilter mit obiger Impulsantwort nicht implementiert werden, da sie in beide Richtungen unendlich ausgedehnt und damit nicht kausal ist. Daher wird sie auf einen Bereich von $\pm N/2$ Samples begrenzt und um $N/2$ verschoben, so daß die wesentlichen Teile der Si-Funktion erhalten bleiben. Das entspricht einer Rechteckfensterung mit Zeitverzögerung. Dadurch ergibt sich eine veränderte Übertragungsfunktion, für die der Übergang vom Durchlaßbereich zum Sperrbereich fließend wird. Die Breite dieses Übergangsbereiches ist $\Delta\Omega_{Rechteck} = \frac{1.8 \cdot \pi}{N}$. Da der Übergangsbereich nicht in Bereichen mit Signalanteilen liegen soll, ergibt sich eine Forderung

$$\Delta\Omega_{Rechteck} \leq 2\Omega_g - 2\Delta\Omega_{BB}$$

Dabei ist $\Delta\Omega_{BB} = \frac{B_{BB} \cdot 2\pi}{f_{abtast}}$ die Bandbreite des Nutzsignals und mit obiger Beziehung für f_g ergibt sich für N eine Mindestgröße von:

$$N \geq \frac{1.8 \cdot \pi f_{abtast}}{(2f_g - 2B_{BB}) \cdot 2\pi} = \frac{1.8 \cdot f_{abtast}}{4(f_g - B_{BB})} = 33$$

Wird statt der einfachen Rechteckfensterung die *Hanning-Fensterfunktion* zur Begrenzung der Impulsantwort genutzt, ergibt sich mit $\Delta\Omega_{Hann} = \frac{6.2 \cdot \pi}{N}$ eine Mindestgröße von $N = 14$.

1.2 Übungsaufgaben

1.2.1 Modulation

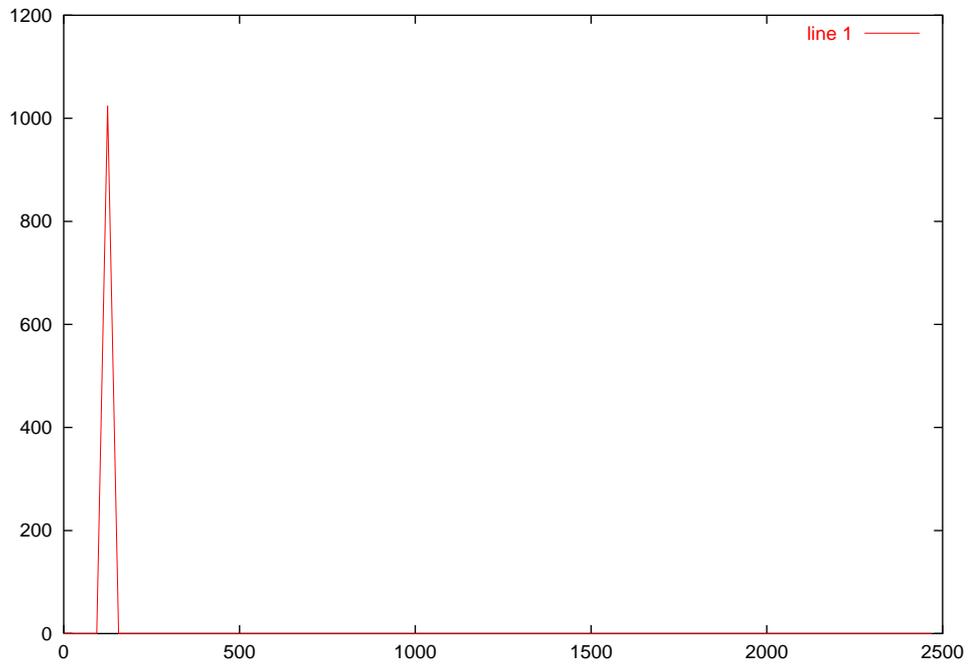
Nachrichten- und Trägersignal erstellen

Es soll ein sinusförmiges Nachrichtensignal der Frequenz $f_u = 125Hz$ mit einem Trägersignal der Frequenz $f_c = 1000Hz$ moduliert werden. Dazu müssen die Signale in OCTAVE erzeugt werden. Dabei gilt als Vorgabe ein Abtastfrequenz von $f_{abtast} = 64kHz$. Um die diskreten Elementnumerierungen in eine Zeitachse t (in Sekunden) umzurechnen, wird die Nummer jedes Elementes durch die Abtastfrequenz f_{abtast} geteilt.

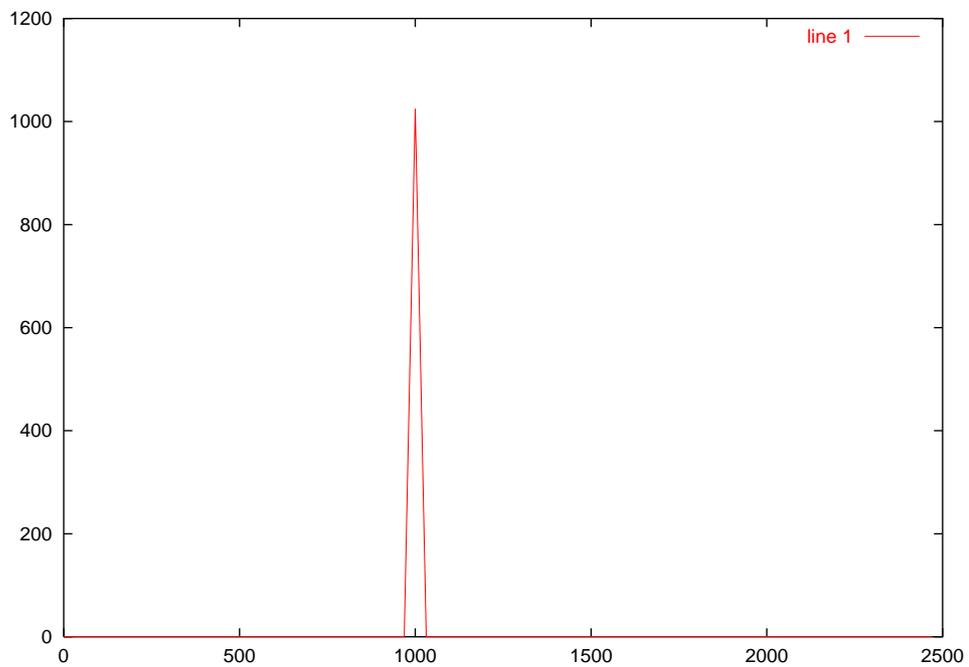
Für alle Darstellungen von Betragsspektren werden jeweils nur die ersten $f_{max} = 2,5kHz$ verwendet, obwohl sämtliche $N = 2048$ Abtastwerte der Signale für die Fouriertransformation benutzt werden. Nach

$$n = \frac{f \cdot N}{f_{abtast}} \tag{1.2}$$

Abbildung 1.3: Betragsspektrum Nachrichtensignal $u(n)$ und Trägersignal $c(n)$



(a) Nachrichtensignal



(b) Trägersignal

entspricht $n - te$ Element des Arrays einer Frequenz f . Alle Darstellungen von Betragsspektren in diesem Protokoll erstrecken sich daher nur über die ersten $n_{max} = \frac{f_{max} \cdot N}{f_{abtast}} = 80$ Elemente der jeweiligen Werte-Arrays.

Die Frequenzachse ergibt sich aus der diskreten Numerierung, indem man Gleichung 1.2 nach f umstellt.

```

% VORGABEN
f_abtast = 64000; % Abtastfrequenz des Systems [Hz]
f_max = 2500; % Plotten bis zu dieser Freq.
samples = 2048; % Anz. der Samples des Nachrichtensig.
f_u = 125; % Frequenz des Nachrichtensig.
f_c = 1000; % Frequenz des Trägersignals
n_max = f_max * samples/f_abtast; % plott bis El. n_max
% Abtastzeitpunkte t und Frequenzen f erzeugen
n = 0:samples-1;
t = n / f_abtast;
f = n * f_abtast / samples;
% Nachrichtensignal u(n) (125Hz-Sinus erzeugen)
omega_u = 2 * pi * f_u;
u = sin(omega_u * t);
% Trägersignal c(n) (1000Hz-Sinus erzeugen)
omega_c = 2 * pi * f_c;
c = sin(omega_c * t);
% Betragsspektren des Nachrichtensignals
bs_u = abs( fft(u) );
plot( f(1:n_max) , bs_u(1:n_max) );
toFile("1-bs_u-plot.ps");
% Betragsspektren des Trägersignals
bs_c = abs( fft(c) );
plot( f(1:n_max) , bs_c(1:n_max) );
toFile("1-bs_c-plot.ps");

```

In den entsprechenden Plots (Bild 1.3) erkennt man deutlich das Paar von δ -Pulsen – charakteristisch für Signale, die nur aus einer Frequenz bestehen. Bei den Plots handelt es sich um diskrete Daten, die Linien dienen nur der Anschaulichkeit.

Amplitudenmodulation

Um ein Nachrichtensignal $u(n)$ mit einem Trägersignal $c(n)$ zu modulieren, müssen beide Signale elementweise miteinander multipliziert werden.

$$u_m(n) = u(n) \cdot c(n)$$

Die Multiplikation im Zeitbereich entspricht dabei einer Faltung im Frequenzbereich.

$$U_m = U * C$$

```
% Amplitudenmodulation von c mit u
u_m = c .* u; plot(u_m);
ToFile("2-u_m-plot.ps");
% Betragsfrequenzgang des modulierten Signals
bs_u_m = abs( fft(u_m) );
plot( f(1:n_max) , bs_u_m(1:n_max) );
ToFile("2-bs_u_m-plot.ps");
```

Im Zeitbereich (Bild 1.4 a) erkennt man deutlich das Trägersignal, das mit einer Einhüllenden des Nachrichtensignals umgeben ist.

Im Frequenzbereich (Bild 1.4 b) erkennt man das δ -Puls Paar des Nachrichtensignals, welches durch Faltung mit dem Peak des Modulationssignals bei 1kHz in diesen Frequenzbereich verschoben worden ist. Die beiden Pulse sind um jeweils 125Hz von 1kHz entfernt und liegen somit bei 875Hz und 1125Hz . Da es sich um ein reelles Signal handelt, ist das Spektrum des modulierten Signals natürlich symmetrisch gegenüber der Trägerfrequenz sowie der Nyquistfrequenz. Bei 63kHz (der Position des zweiten Peaks des Trägersignals) taucht also das δ -Puls Paar des Nachrichtensignals noch einmal auf. Das ist aber im Plot nicht zu erkennen, da dieser nur bis $2,5\text{kHz}$ reicht.

1.2.2 Demodulation

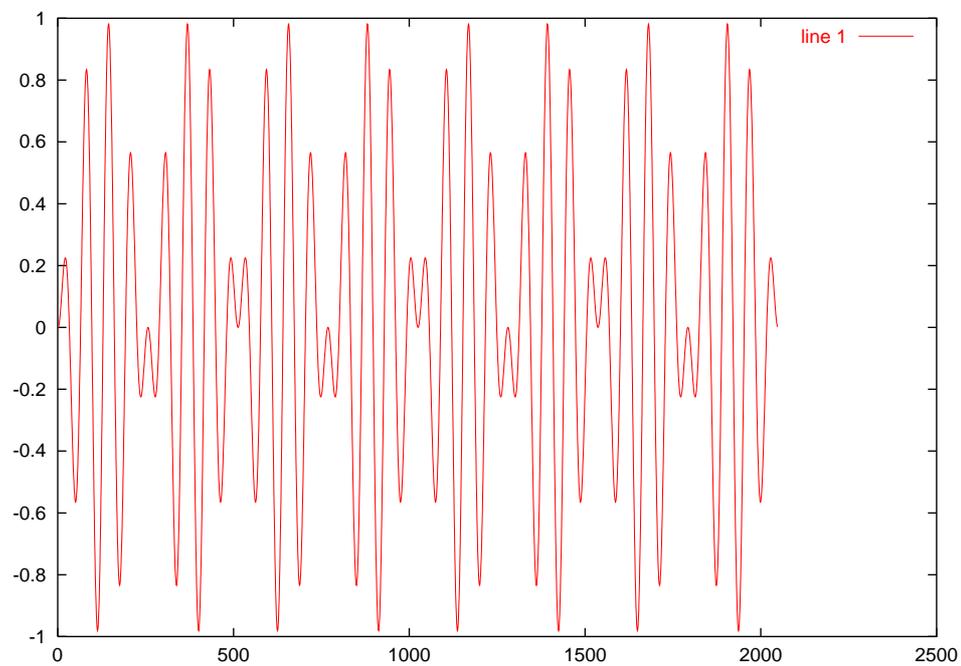
Synchrone Demodulation

Um das Nachrichtensignal $u(n)$ wieder aus dem modulierten Signal $u_m(n)$ herzustellen, muß man dieses noch einmal mit exakt derselben Trägerfrequenz modulieren.

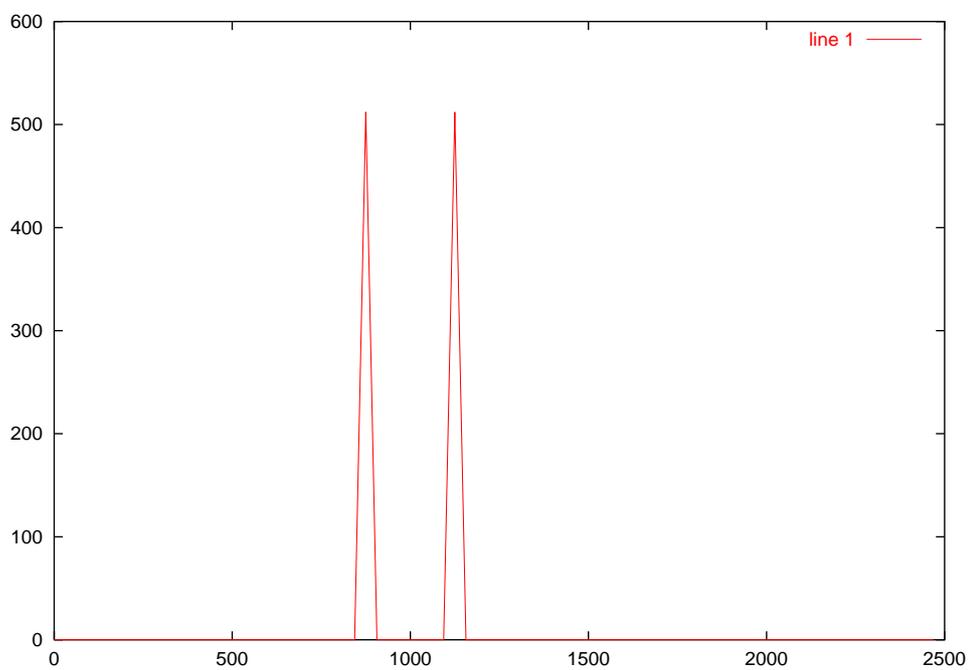
$$y_d(n) = u_m(n) \cdot c(n)$$

```
% Synchrone Demodulation
y_d = u_m .* c; % Signal wird nochmal mit Träger moduliert
plot(y_d);
ToFile("3-y_d-plot.ps");
% Betragsfrequenzgang des demodulierten Signals
bs_y_d = abs( fft(y_d) );
plot( f(1:n_max) , bs_y_d(1:n_max) );
ToFile("3-bs_y_d-plot.ps");
```

Abbildung 1.4: Amplitudenmoduliertes Signal $u_m(n)$ im Zeit- und Frequenzbereich

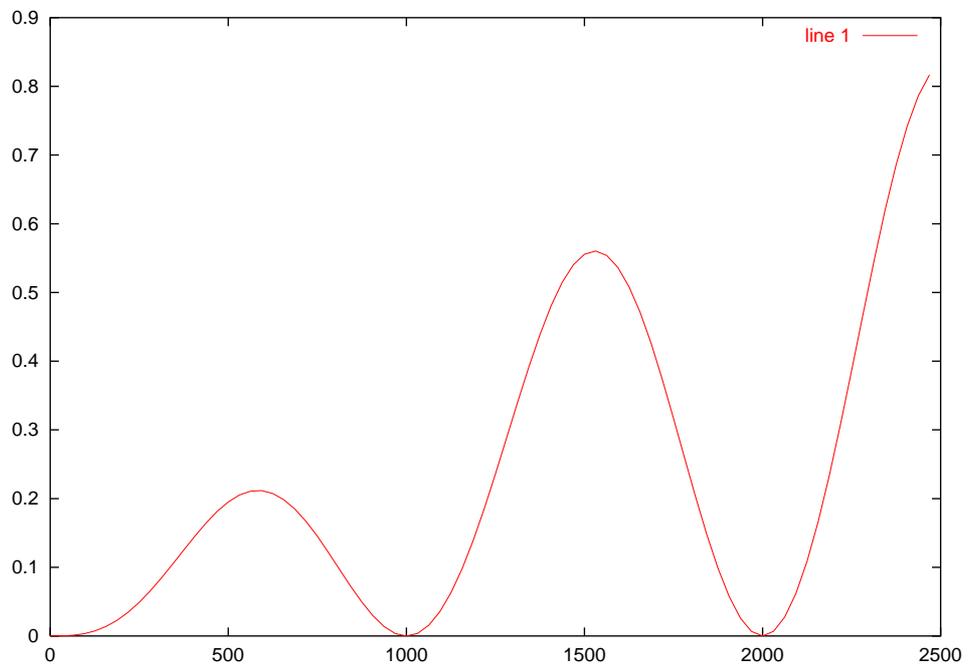


(a) Zeitbereich (Amplitudenverlauf)

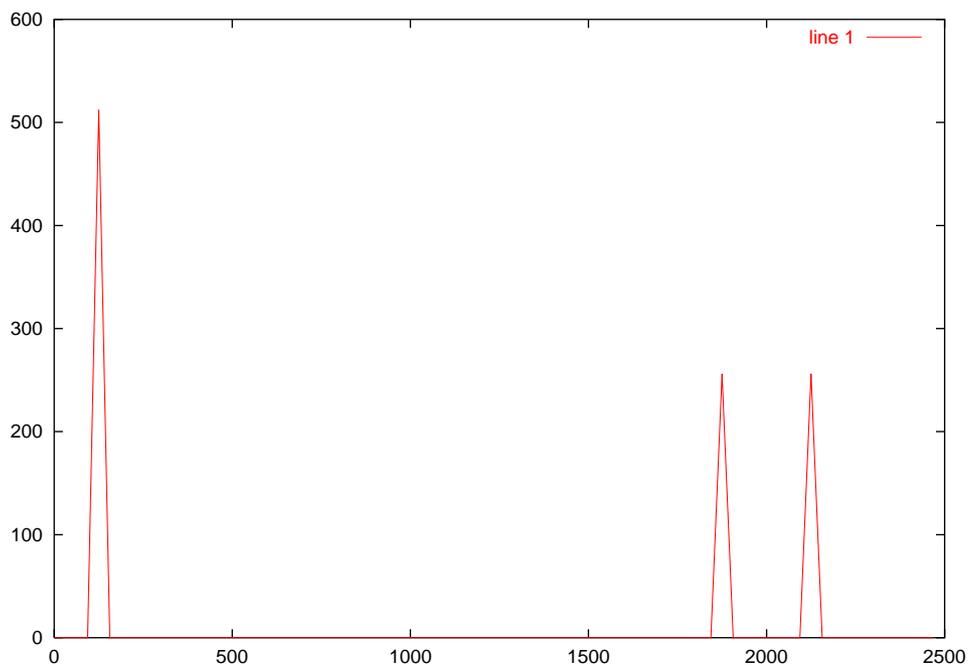


(b) Frequenzbereich (Betragsspektrum)

Abbildung 1.5: Demoduliertes Signal $y_d(n)$ im Zeit- und Frequenzbereich



(a) Zeitbereich (Amplitudenverlauf)



(b) Frequenzbereich (Betragsspektrum)

Tiefpaßfilterung I – Rechteck-Fenster

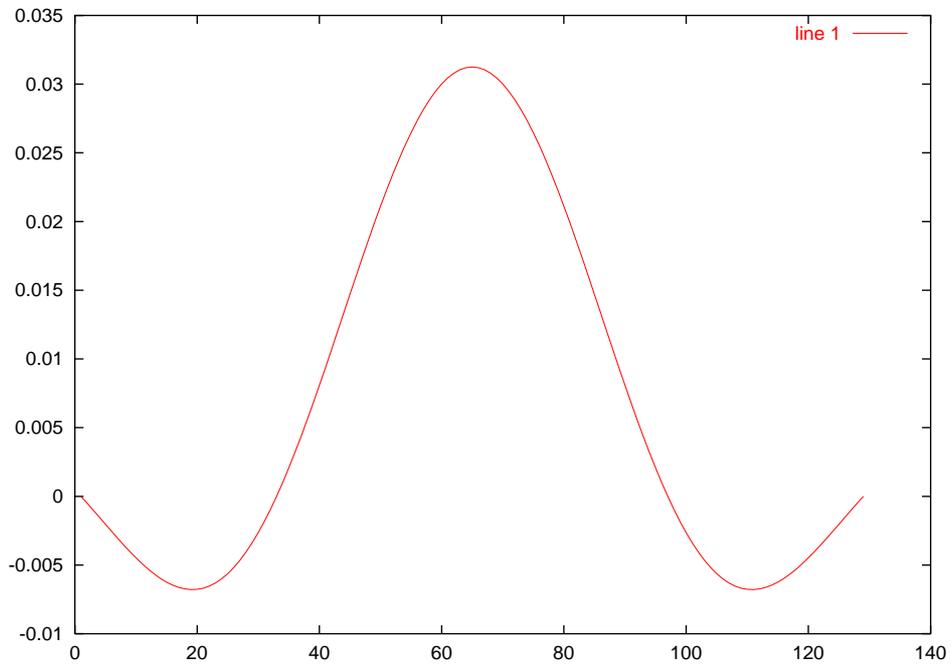
Da nach einer synchronen Demodulation das wiederhergestellte Nachrichtensignal mit hochfrequenten Kopien desselben Signals überlagert ist, soll eine Tiefpaßfilterung durchgeführt werden. Dabei nutzen wir gemäß der Vorbereitungsaufgaben eine Näherung für ein Rechteckfilter mit einer Grenzfrequenz von $\Omega_g = \frac{2\pi}{64}$, was einer Frequenz von $f_g = \frac{f_{abtast} \cdot \Omega_g}{2\pi} = 1000 \text{ Hz}$ entspricht. Die Näherung geschieht durch Begrenzung der (eigentlich unendlichen, da nichtkausalen) Impulsantwort auf ein Intervall von $[-64, +64]$. Es werden also nur 128 Filterkoeffizienten berücksichtigt.

```
% TP-Filter (FIR-Filter, Rechteck) erstellen
omega_g = pi/32; % Filtergrenzfrequenz
koeff_anz = 128; % Anzahl Filterkoeffizienten
% Impulsantwort des Filters bestimmen
h_zeiten = -(koeff_anz/2):(koeff_anz/2)
h = (omega_g/pi) * sinc( omega_g * h_zeiten / pi );
plot(h);
ToFile("4-impant_h-plot.ps");
% Spektrum der Impulsantwort des Filters bestimmen
bs_ia_h = abs( fft(h, 2048) );
plot( f(1:n_max) , bs_ia_h(1:n_max) );
ToFile("4-bs_ia_h-plot.ps");
% Filterkoeffizienten
a = [1 , zeros(koeff_anz,1)']; % ist 1,0,0,0,0, ...
b = h; % Impulsantw. des Filters gibt Filterkoeff. (FIR)
% demoduliertes Signal filtern
z = filter( b, a, [y_d , zeros(koeff_anz/2, 1)'] );
z = z(65:length(z));
plot(z);
ToFile("4-z-plot.ps");
% Betragsgang des gefilterten Signals
bs_z = abs( fft(z) );
plot( f(1:n_max) , bs_z(1:n_max) );
ToFile("4-bs_z-plot.ps");
```

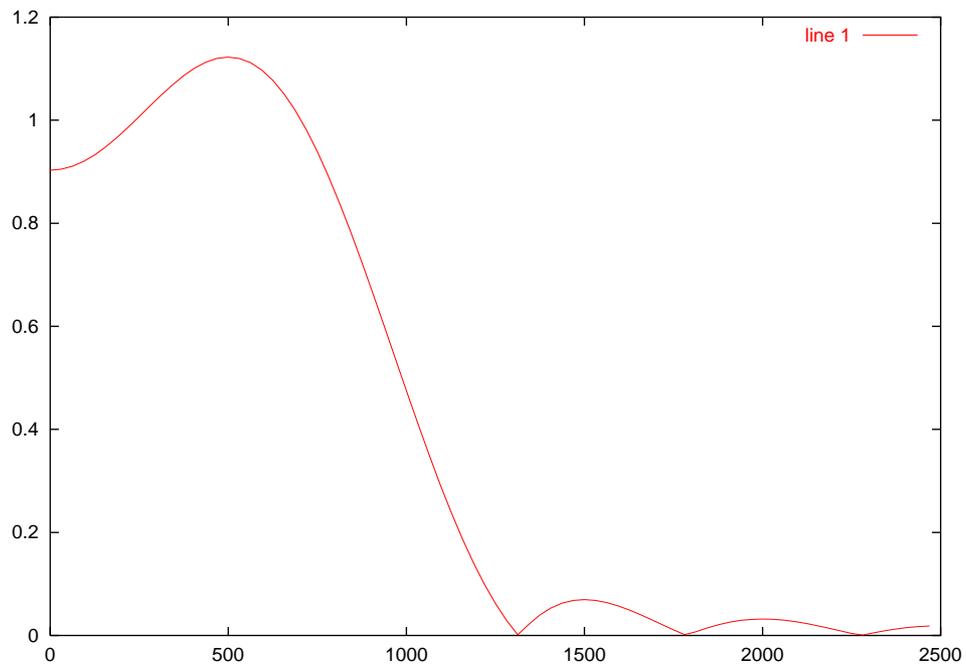
Beim Plot der Impulsantwort (Bild 1.6 a) ist zu beachten, daß die nicht dargestellten Werte auf Null gesetzt sind. Im Spektrum (Bild 1.6 b) ist der Tiefpaßcharakter und der Übergangsbereich in der Gegend von 1 kHz zu erkennen. Die Welligkeit im Sperrbereich entsteht aufgrund der Rechteckfensterung der Impulsantwort.

Das demodulierte Signal (Bild 1.7) entspricht von kleinen Einbrüchen bei den Extremstellen recht gut dem ursprünglichen Nutzsignal. Die Intensität ist jedoch halbiert und die hochfrequente Spiegelung um 2 kHz macht nur noch 2-3 Prozent des Nutzsignals aus. Das Ergebnis ist brauchbar.

Abbildung 1.6: Tiefpaß (Rechteck-Fensterung)

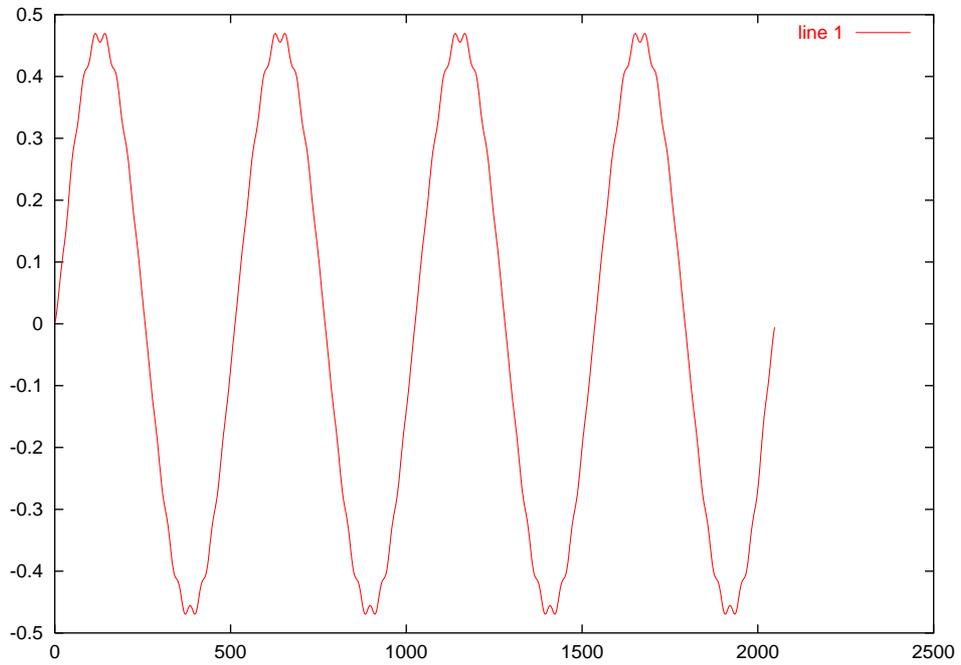


(a) Impulsantwort $h(n)$

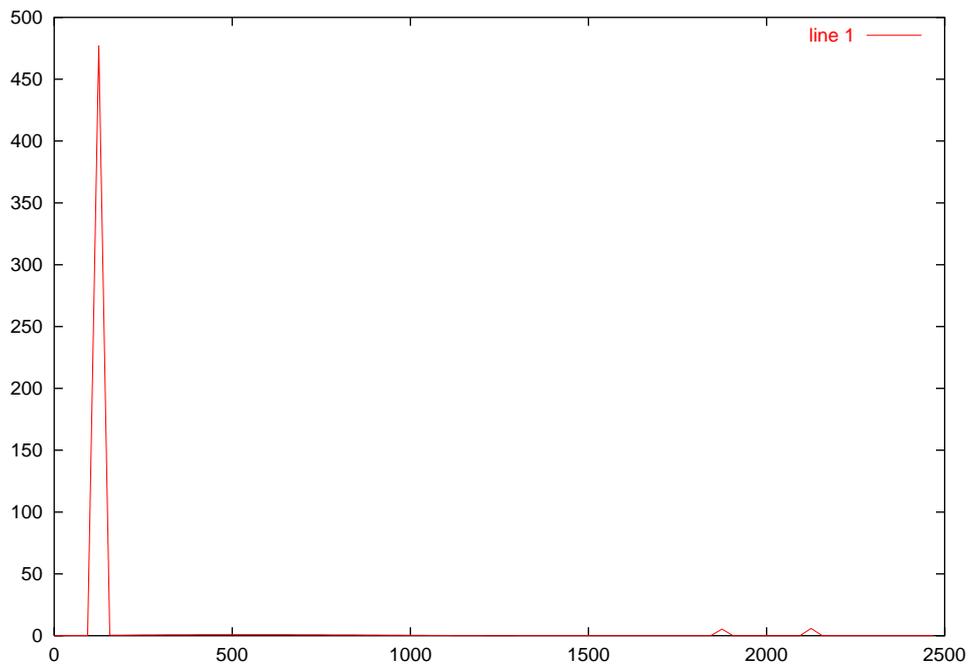


(b) Übertragungsfunktion H

Abbildung 1.7: Gefiltertes Signal $z(n)$ im Zeit- und Frequenzbereich



(a) Zeitbereich (Amplitudenverlauf)



(b) Frequenzbereich (Betragsspektrum)

Tiefpaßfilterung II (Hanning-Fenster)

Die Impulsantwort der in Abschnitt 1.2.2 verwendeten Tiefpaßfilterung entstand durch Fensterung einer Si-Funktion mit einer Rechteckfunktion, wodurch in der Übertragungsfunktion eine starke Welligkeit (Bild 1.6 b) entsteht.

Günstiger ist eine Fensterung mit einem *Hanning-Fenster* der gleichen Breite (Bild 1.8 a), was in der Übertragungsfunktion auf Bild 1.8 b) sehr schön zu erkennen ist. Es sind kaum noch Wellen zu erkennen, dafür ist der Übergangsbereich etwas breiter. Bild vergleicht noch einmal beide Übertragungsfunktionen, die diesmal logarithmisch aufgetragen sind.

Nach der Filterung wird deutlich, welche Vorteile ein glattere Übertragungsfunktion hat. Das gefilterte Signal (Bild 1.9) entspricht wesentlich besser der Originalsignal. Im Zeitbereich sind keine Einbrüche an den Extremstellen mehr zu entdecken und im Frequenzbereich zeigt sich eine bessere Dämpfung der spektralen Anteile außerhalb des Basisbandes.

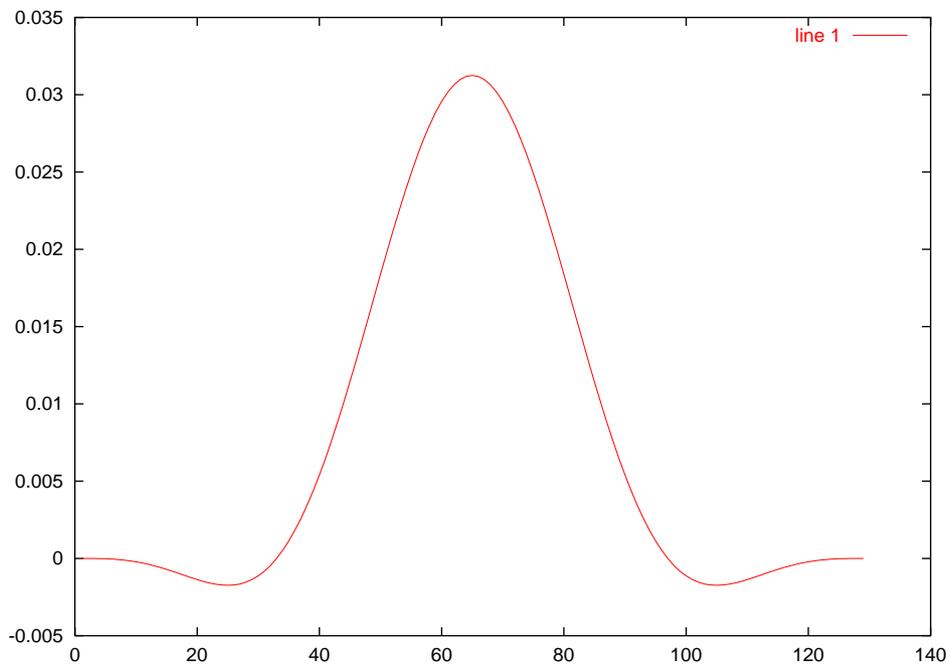
Asynchrone Demodulation

Als nächstes wird die Demodulation nicht mit der exakten, sondern mit einer um $\Delta f_c = \frac{f_u}{4} = \frac{125\text{Hz}}{4} = 31,25\text{Hz}$ versetzten Trägerfrequenz vorgenommen. Die Demodulationsfrequenz wird also $1031,25\text{Hz}$.

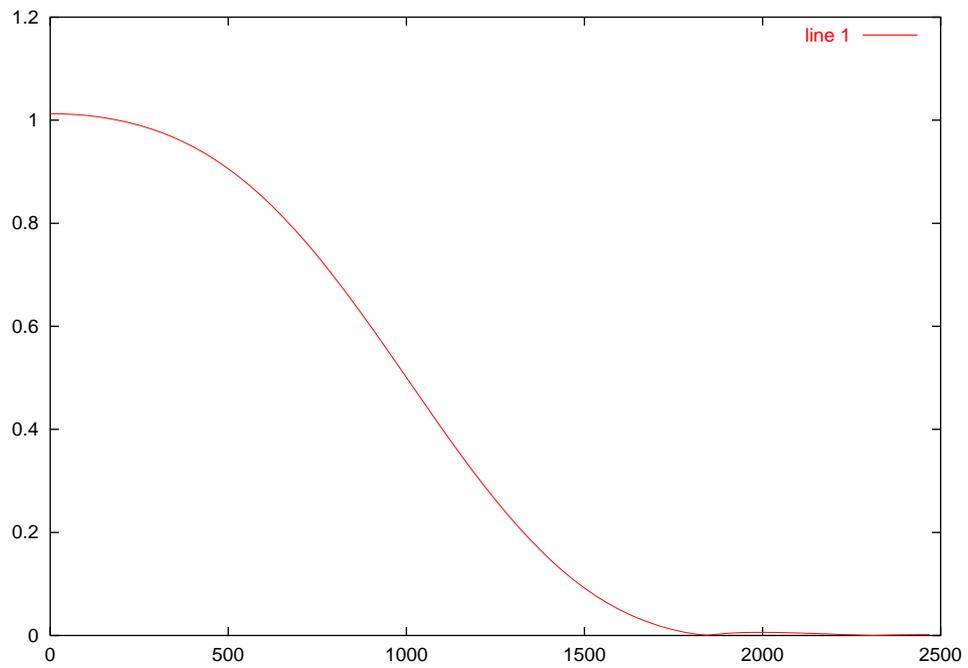
```
% mit Frequenzversatz demodulieren
f_versatz = f_u/4;
omega_c2 = 2*pi * (f_c + f_versatz);
c2 = sin(omega_c2* t);
y_d2 = u_m .* c2;
% Betragsfrequenzgang des falsch demodulierten Signals
bs_y_d2 = abs( fft(y_d2) );
plot( f(1:n_max) , bs_y_d2(1:n_max) );
toFile("5-bs_y_d2-plot.ps");
% demoduliertes Signal TP-Filtern
z2 = filter( b, a, [y_d2 , zeros(koeff_anz/2, 1)'] );
z2 = z2(65:length(z2));
% Betragsfrequenzgang des gefilterten Signals
bs_z2 = abs( fft(z2) );
plot( f(1:n_max) , bs_z2(1:n_max) );
toFile("5-bs_z-plot.ps");
```

Im resultierenden demodulierten Signal (Bild 1.10) fällt auf, daß das eigentliche Nutzsignal nicht mehr vorhanden ist. Es sind jedoch zwei Signale entstanden, die mit dem

Abbildung 1.8: Tiefpaßfilter (Hanning-Fensterung)

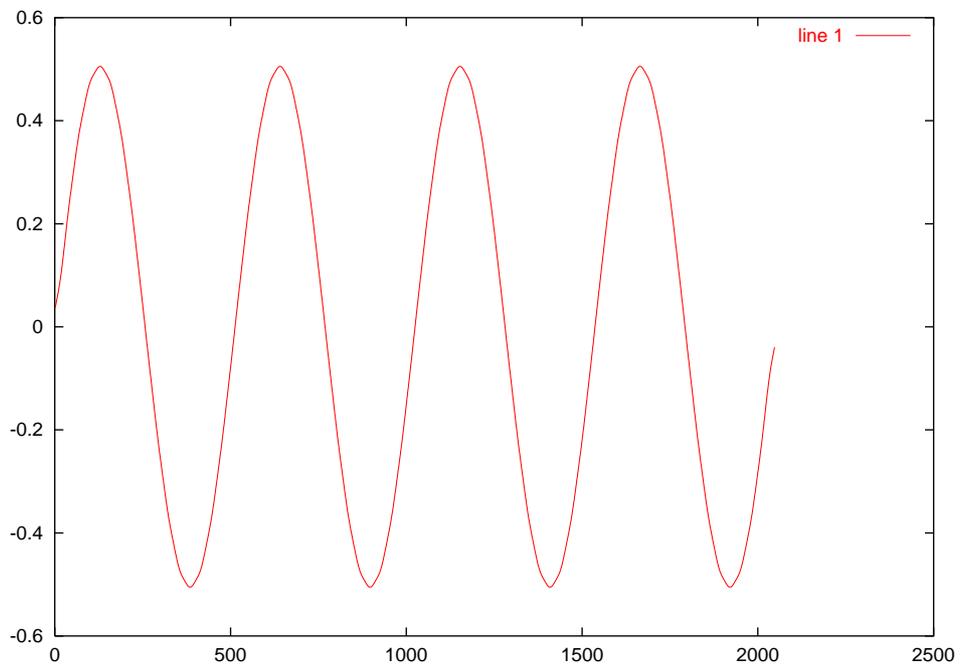


(a) Impulsantwort $h_2(n)$

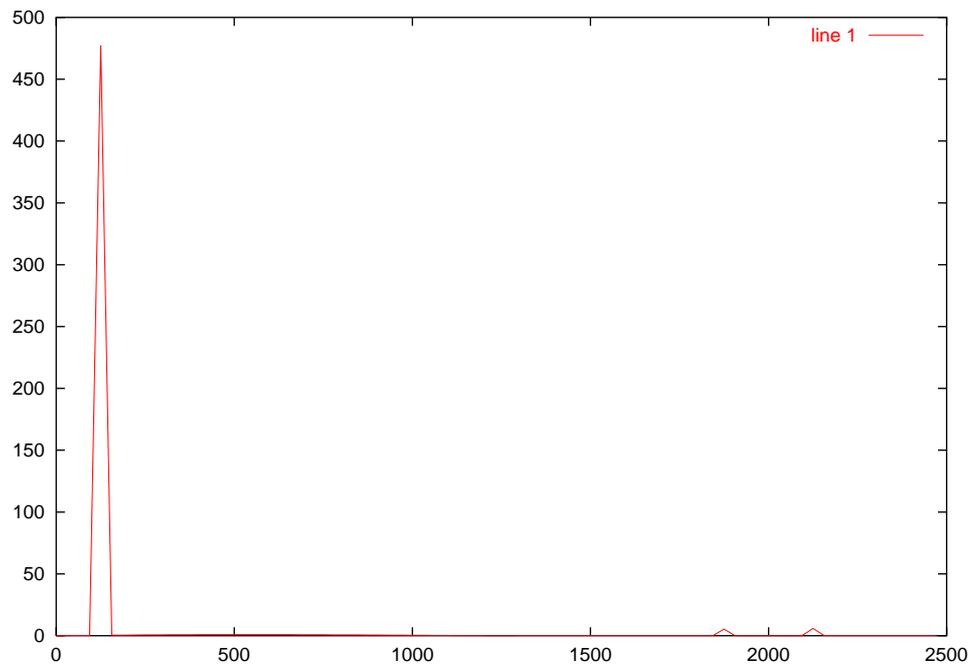


(b) Übertragungsfunktion H_2

Abbildung 1.9: Gefiltertes Signal $z_2(n)$ im Zeit- und Frequenzbereich

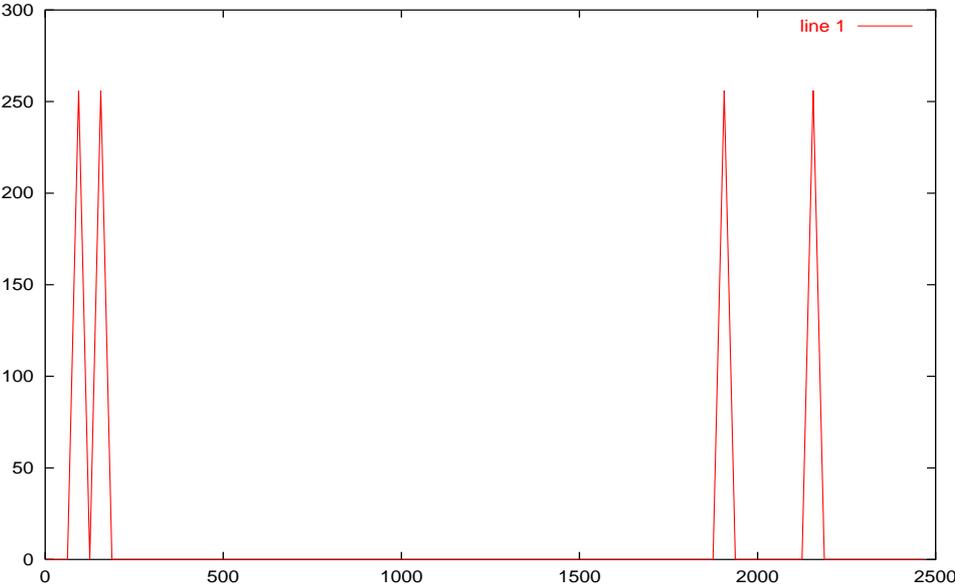


(a) Zeitbereich (Amplitudenverlauf)

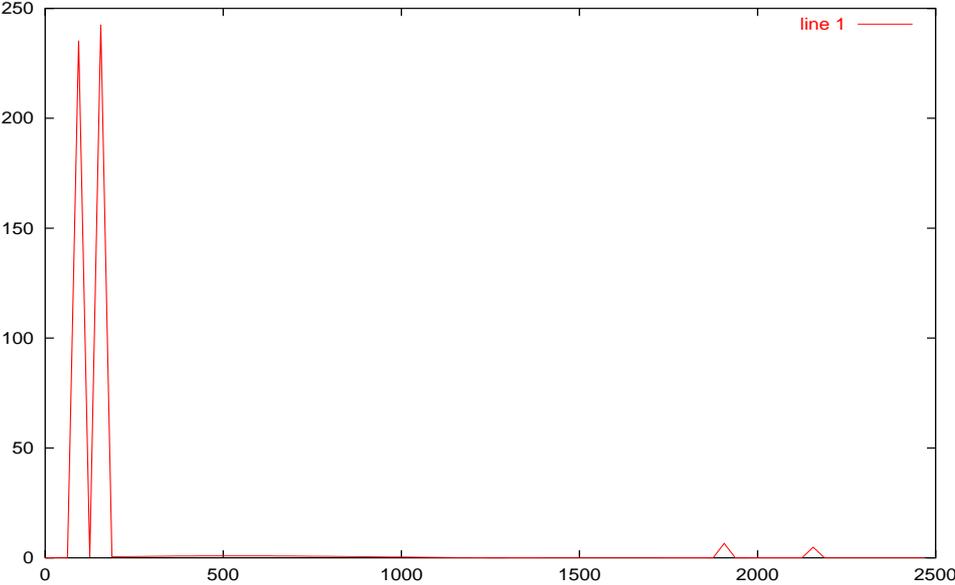


(b) Frequenzbereich (Betragsspektrum)

Abbildung 1.10: Betragsspektrum des asynchron demodulierten Signals $y_{d_2}(n)$ und des gefilterten Signals $z_2(n)$



(a) Demoduliertes Signal (ungefiltert)



(b) Gefiltertes Signal

Abstand $\Delta f_c = 31.25 Hz$ um die ursprüngliche Frequenz f_u verteilt sind. So sind also aus ursprünglichen $125 Hz$ nun $94 Hz$ und $156 Hz$ geworden, was sehr deutlich hörbar wäre. Ein Demodulationsfehler ist also immer hörbar. Auch wenn er extrem klein wäre, äußert er sich in Schwebungen.

Kapitel 2

Übungsblatt 6 – Frequenzmodulation

Bei der Frequenzmodulation wird im Gegensatz zur Amplitudenmodulation die *Frequenz* des Trägersignals durch das Nutzsinal verändert. Die Amplitude bleibt dabei nahezu konstant. Die Demodulation ist entsprechend komplizierter, da eine Frequenzänderung wieder in eine Amplitudenänderung transformiert werden muß.

2.1 Vorbereitungsaufgaben

2.1.1 Frequenzänderungskonstante des VCO berechnen

Bei der Frequenzmodulation wird das Verhältnis der Signaländerung zu einer Frequenzänderung durch einen Faktor K_{FM} bestimmt. Er kann auch aus dem Modulationsindex β berechnet werden.

$$K_{FM} = \beta \cdot \frac{\Omega_u}{A_u} = 2 \cdot \frac{2\pi \cdot 125Hz}{64000Hz \cdot 1} = 0.02454$$

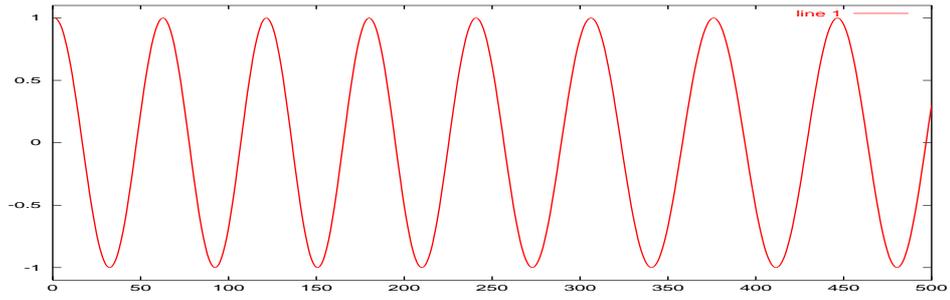
2.1.2 Signalverläufe

Die Demodulation soll durch Wandlung in ein pulsfrequenzmoduliertes Signal geschehen, bei dem zunächst über einen Begrenzer ein quasi-digitales Signal entsteht. Zusammen mit einer zeitverzögerten Kopie des Signals und einer binären XOR-Operation wird die Pulsweite nun auf einen konstanten Wert eingestellt.

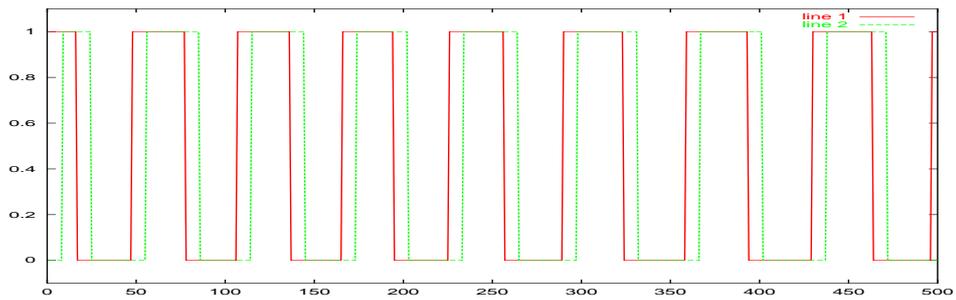
Bild 2.1 veranschaulicht dieses Verfahren, indem es das modulierte Signal $u_m(n)$ (2.1 a), das begrenzte Signal $r_m(n)$ samt seiner zeitverschobenen Version $r_m(n - K)$ (2.1 b) und das pulsfrequenzmodulierte Signal $v(n)$ (2.1 c) für kleine Frequenzen ($f_u = 50Hz$) im Zusammenhang zeigt.

Bild 2.2 veranschaulicht das Ganze für große Frequenzen ($f_u = 500Hz$).

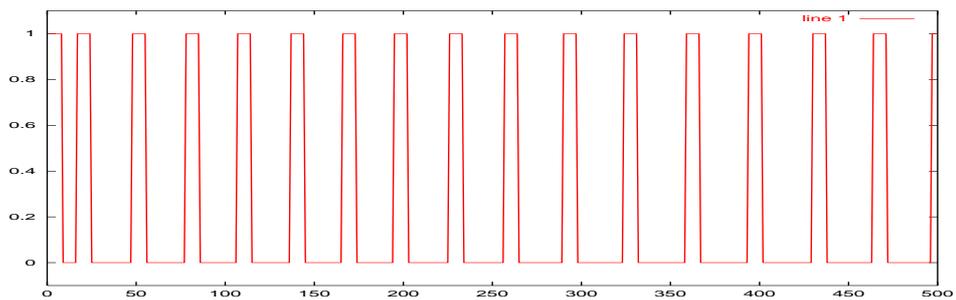
Abbildung 2.1: FM-Demodulation (50Hz)



(a) Moduliertes Signal

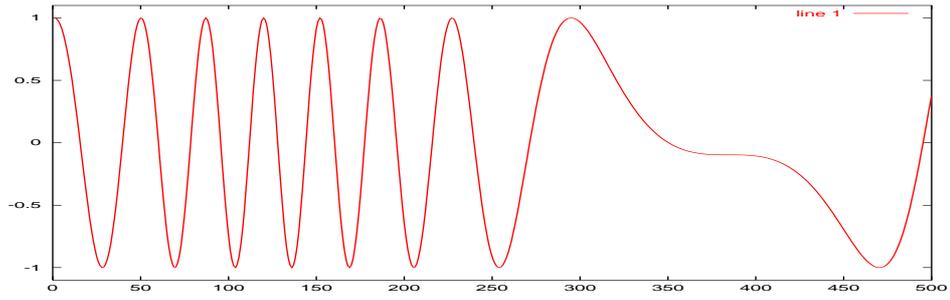


(b) Begrenztes Signal (rot) und zeitverschobene Version (grün)

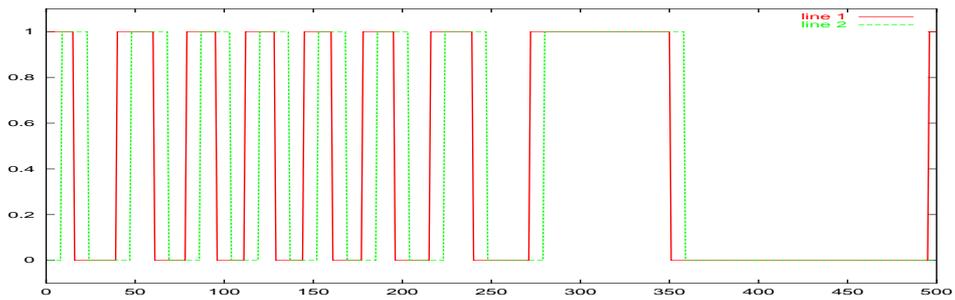


(c) Pulsfrequenzmoduliertes Signal

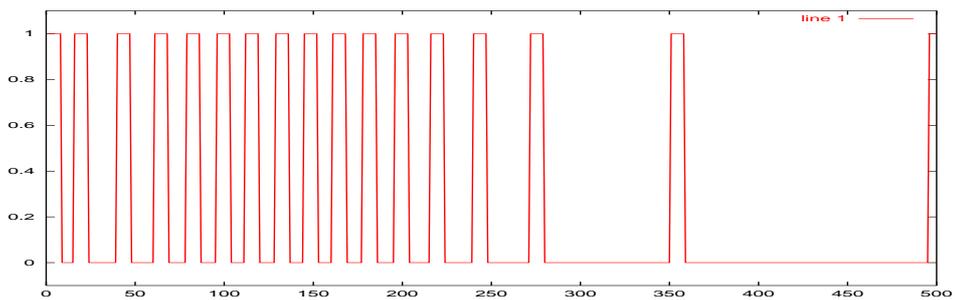
Abbildung 2.2: FM-Demodulation (500Hz)



(a) Moduliertes Signal



(b) Begrenztes Signal (rot) und zeitverschobene Version (grün)



(c) Pulsfrequenzmoduliertes Signal

2.2 Übungsaufgaben

2.2.1 Modulation

Signale erzeugen

Zunächst müssen (analog zum letzten Protokoll) das Nachrichten- und das Trägersignal erzeugt werden. Für die Betrachtungen im Zusammenhang mit der Umwandlung von kontinuierlichen Frequenzen in diskrete Array-Indizes sei auf Abschnitt 1.2.1 verwiesen.

Neu hinzugekommen ist hier lediglich die Deklaration des Modulationsindex **beta**, der in späteren Abschnitten Verwendung findet.

```
amp = 1           % Amplitude des Nachrichtensignals
beta = 2          % Modulationsindex
samples = 2048   % Anzahl der Abtastwerte
f_abtast = 64000 % Abtastfrequenz des Systems
f_c = 1000       % Frequenz des Trägersignals
                  (Freilauffreq. des VCOs)
f_u = 125        % Frequenz des Nachrichtensignals
% Frequenzen f erzeugen
n = 0:samples-1;
f = n*f_abtast/samples;
% Nachrichtensignal (125Hz-Cosinus erzeugen)
Omega_u = (2*pi * f_u) / f_abtast
u = amp * cos(Omega_u * n);
% Trägersignal (1000Hz-Sinus erzeugen)
Omega_c = (2*pi * f_c) / f_abtast
c = sin(Omega_c * n);
```

Phasenverlauf des Nachrichtensignals

Um ein frequenzmoduliertes Signal zu erzeugen, wird das Nachrichtensignal auf den Eingang eines VCO (*Voltage Controlled Oscillator*) gelegt. Dieser schwingt bei einer Eingangsspannung von $U_e = 0V$ mit einer Freilauffrequenz, die in unserer Anwendung die Trägerfrequenz f_c darstellt. Wird U_e größer, steigt die Frequenz linear mit dem Faktor K_{FM} an.

Die Amplitudenänderung des Eingangssignals resultiert also in einer Frequenzänderung des Ausgangssignals. Betrachtet man nicht gleich die Frequenz- sondern erst ein-

mal die Phasenänderung, so ergibt sich für kontinuierliche Signale

$$\varphi[u(t)] = \omega_c t + K_{FM} \cdot \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

und für die Betrachtung im diskreten Bereich

$$\varphi[u(n)] = \Omega_c n + K_{FM} \cdot \sum_{k=-\infty}^n u(k) \quad (2.2)$$

für den Phasenverlauf des Signals.

Für die Berechnung der kumulativen Summe in Gleichung 2.2 wird die OCTAVE-Funktion **cumsum** verwendet, welche einen Array mit sovielen Elementen zurück liefert, wie die übergebene Funktion Werte hat. Jedes zurückgelieferte Element n ist dabei die Summe aller Elemente mit einem Index kleiner gleich n. Der Ergebnisvektor enthält also einen sinusförmigen Verlauf.

```
% VCO-Steigung berechnen
K_fm = (beta * Omega_u) / amp

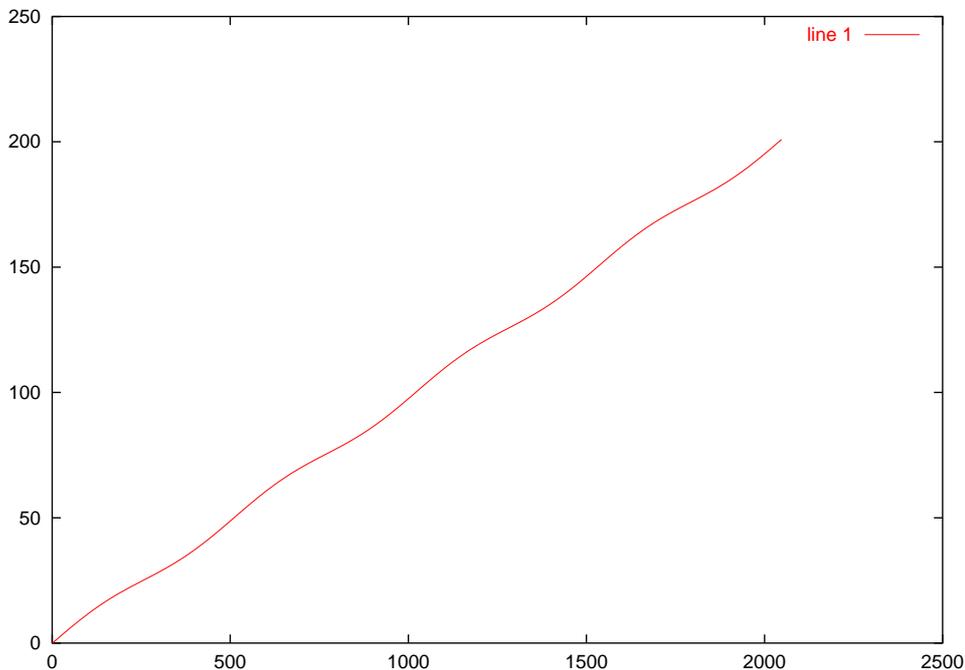
% Phasenverlauf
phi = Omega_c * n + K_fm * cumsum(u);
plot(phi);
toFile("2-phi-plot.ps");
```

Frequenzmodulation

Die Frequenzmodulation ergibt sich aus dem Cosinus des in Gleichung 2.1 bzw. Gleichung 2.2 berechneten Phasenverlaufs $\varphi(n)$.

Man erkennt in Bild 2.4 deutlich das zugrundeliegende Trägersignal $c(n)$, welches abhängig von der Amplitude des Nachrichtensignals $u(n)$ eine unterschiedliche Frequenz aufweist. Dort wo das Nachrichtensignal eine große Amplitude hat, folgen auch die Schwingungen des modulierten Signals schnell aufeinander – die Funktion wirkt gestaucht. Dort wo die Amplitude des Nachrichtensignals kleiner ist, folgen auch die Schwingungen des modulierten Signals langsamer aufeinander – die Funktion wirkt gestreckt.

Abbildung 2.3: Phasenverlauf $\varphi(n)$ des Nachrichtensignals für $\beta = 2$



```
% FM-modulieren
u_m = cos(phi);
% Betragsfrequenzgang des modulierten Signals
n_max = (2* f_c) * (samples/f_abtast) % entspr.
                                         Array-Index

bs_u_m = abs( fft(u_m) );
plot( f(1:n_max) , bs_u_m(1:n_max), '^');
toFile("3-bs_u_m-plot.ps");
% Bandbreite nach Carson-Regel berechnen
B_KM = 2 * Omega_u * (2+beta)
```

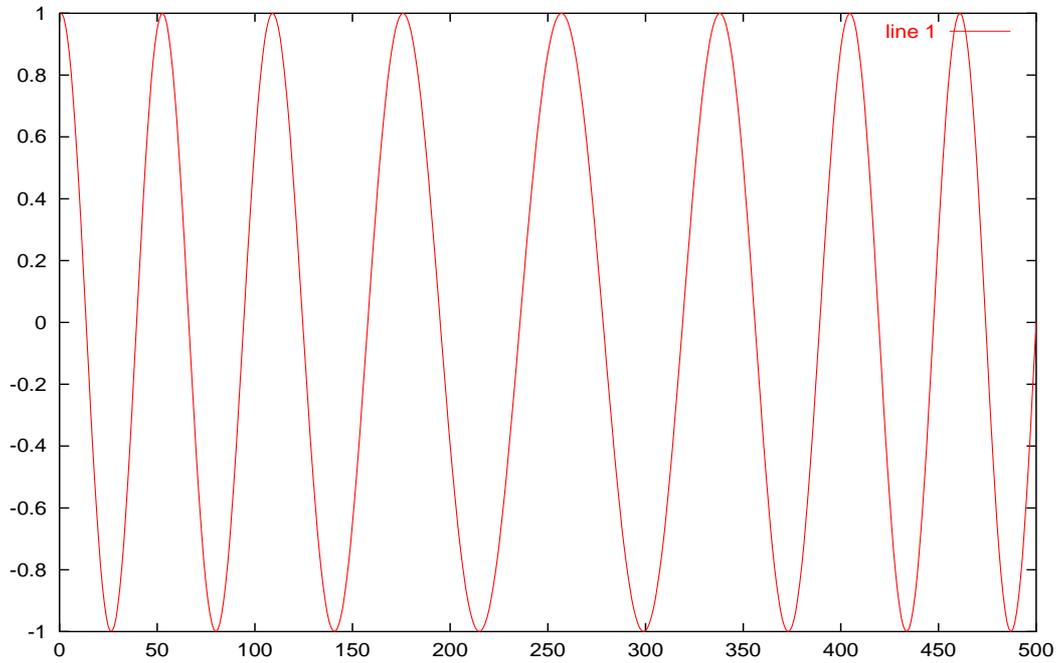
In Bild 2.5 ist das Betragsspektrum des modulierten Signals aufgetragen. Es ist deutlich die Trägerfrequenz bei 1kHz zu erkennen. Außerdem sieht man andere anderen Frequenzen, die durch die Modulation des Trägersignals – durch dessen Frequenzänderung also – entstanden sind.

Die Bandbreite des modulierten Signals B_{KM} läßt sich bei Breitband-Frequenzmodulation (hier ist der Modulationsindex $\beta > 1$) nach der Carson-Regel

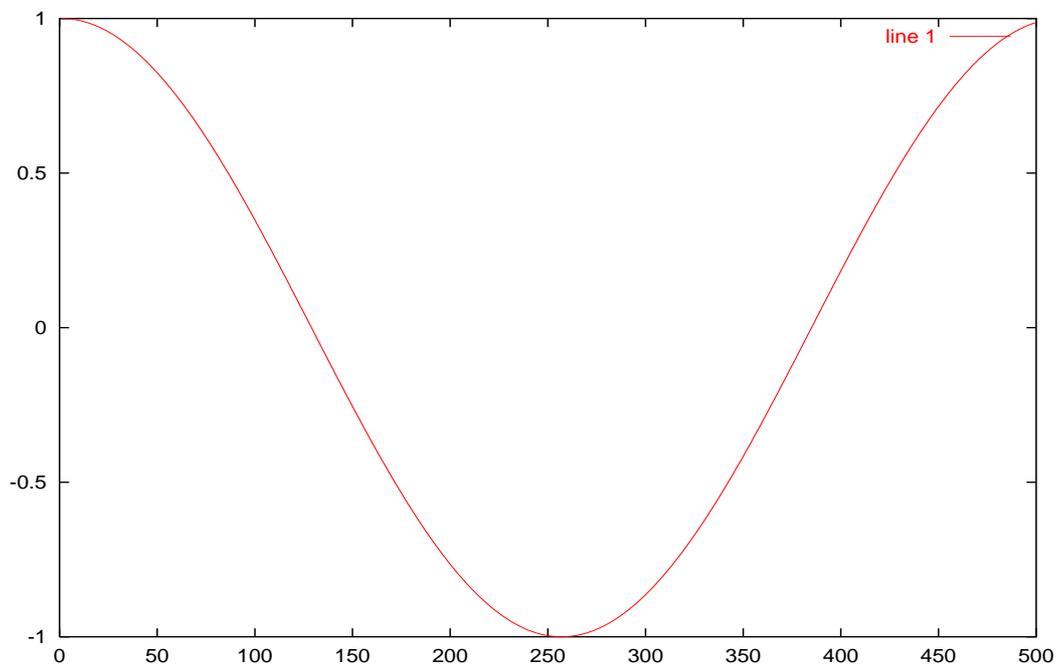
$$B_{KM} \approx 2f_u(2 + \beta)$$

ungefähr berechnen. In unserem Beispiel kommen wir auf $B_{KM} \approx 2 \cdot 125\text{Hz} \cdot (2+2) = 1000\text{Hz}$.

Abbildung 2.4: Moduliertes Signal $u_m(n)$ und Nachrichtensignal $u(t)$

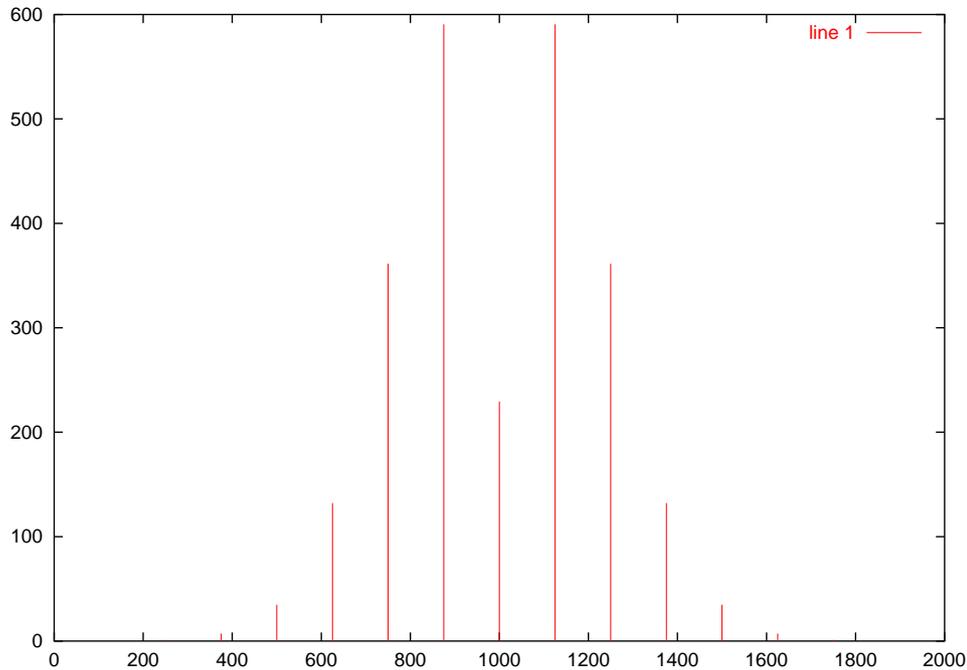


(a) Moduliertes Signal



(b) Nachrichtensignal

Abbildung 2.5: Betragsspektrum des modulierten Signals für $u_m(n)$



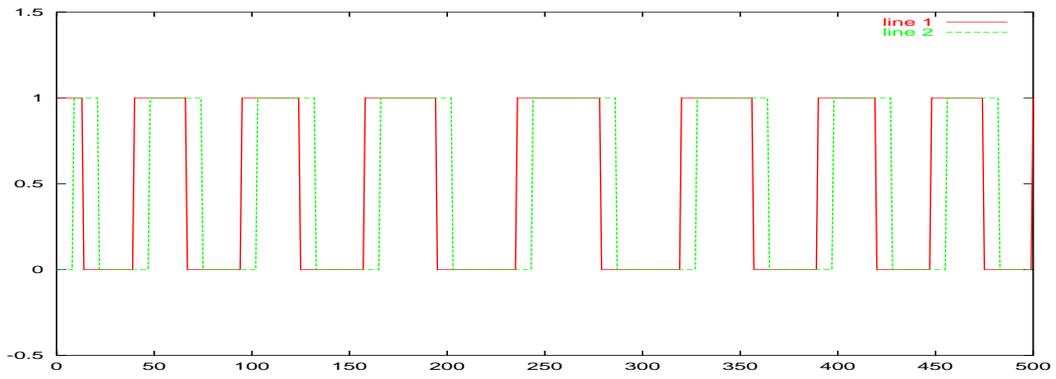
2.2.2 Demodulation

PFM-Wandlung

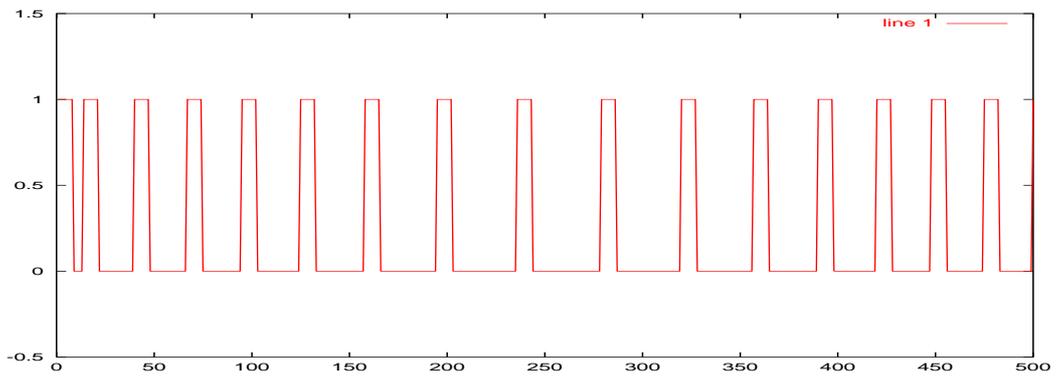
In Bild 2.6 wurde versucht, die Wandlung eines frequenzmodulierten Signals (FM) in ein pulsfrequenzmoduliertes Signal (PFM) zu verdeutlichen.

```
hold on;
clg;
axis([0,500,-0.5,1.5]);
% r_m erzeugen
r_m = zeros(1, length(n));
r_m( find(u_m>0) ) = 1;
plot(r_m);
% Verzögerte Version von r_m erzeugen
r_m_verz = [ zeros(1, 8) , r_m(1:samples-8) ];
plot(r_m_verz);
ToFile("4-r_m-plot.ps");
hold off;
% Beide Signale verXOREn
v = xor(r_m, r_m_verz);
```

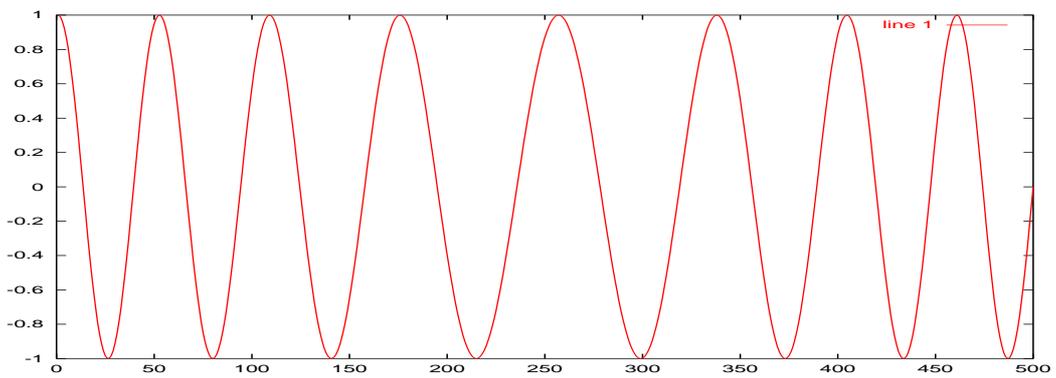
Abbildung 2.6: Verdeutlichung der PFM-Wandlung



(a) Vorstufe der PFM-Wandlung



(b) PFM-Signal



(c) Moduliertes Signal

```

plot(v);
toFile("4-v-plot.ps");
axis();

```

Zunächst wurde eine Funktion $r_m(u(n))$ erstellt (Bild 2.6 a) roter Graph die überall dort 1 ist, wo $u(n)$ einen Wert größer Null besitzt. Überall anders ist sie 0. Diese wird mit einer verschobenen Version ihrer selbst (Bild 2.6 a) grüner Graph) ihrer selbst verodert (elementweise XOR-Verknüpfung). Das Ergebnis ist in (Bild 2.6 b) zu erkennen. Das entstehende Signal besteht aus vielen gleichbreiten Pulsen, die unterschiedlich schnell aufeinander folgen. Je höher die Frequenz des modulierten Signals bzw. die Amplitude des Nachrichtensignals ist, desto schneller folgen die Pulse aufeinander. Diese Form der Modulation bezeichnet man als Pulsweitenmodulation (*PWM*). Zum Vergleich ist darunter (Bild 2.6 c) noch einmal der entsprechende Ausschnitt des modulierten Signals dargestellt.

Tiefpaßfilter erzeugen

Wir verwenden ein gespeichertes Tiefpassfilter mit einer Impulsantwort von 1025 Werten und einer Grenzfrequenz von $f = 256\text{Hz}$, um die Demodulation zu komplettieren.

```

% Tiefpassfilter (FIR)-Filter erstellen
load htp128.dat; % Impulsantwort des Filters laden
plot(htp128);
toFile("5-htp128-plot.ps");
omega_g = pi/128; % Filtergrenzfrequenz
a = [1 , zeros(1024,1)']; % ist 1,0,0,0,0, ...
b = htp128;
% Betragsgang der Impulsantwort bestimmen
bs_htp128 = abs( fft(htp128, 2048) );
plot(f(1:n_max) , bs_htp128(1:n_max) , 'b');
toFile("5-bs_htp128-plot.ps");

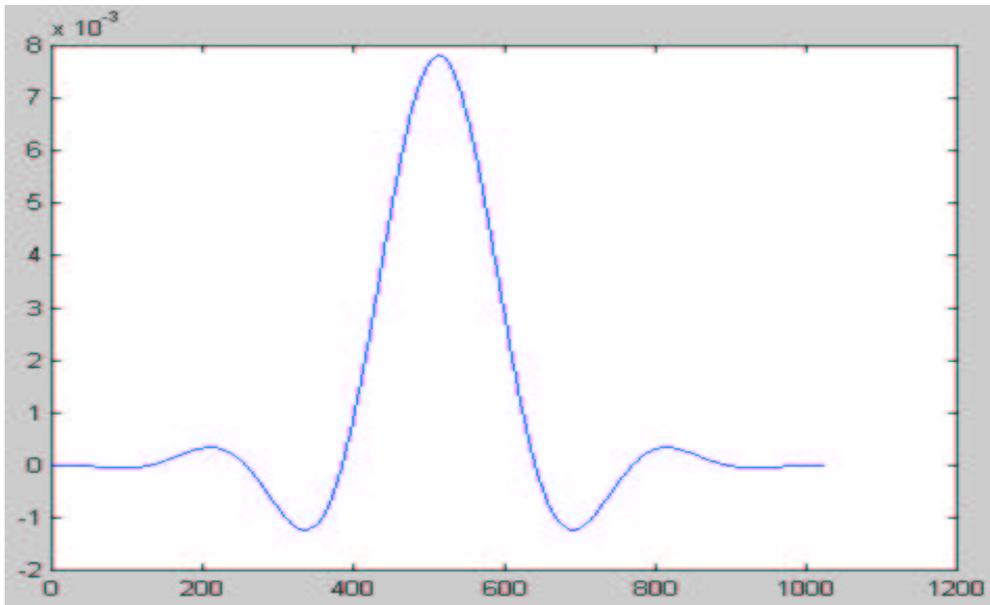
```

Die Impulsantwort, zu sehen in Bild 2.7 a, sieht ähnlich der Hanning-gefensterten Version des Tiefpasses aus Abschnitt 1.2.2 aus. Im Frequenzgang (Bild 2.7 b) sind keine auffälligen Welligkeiten enthalten.

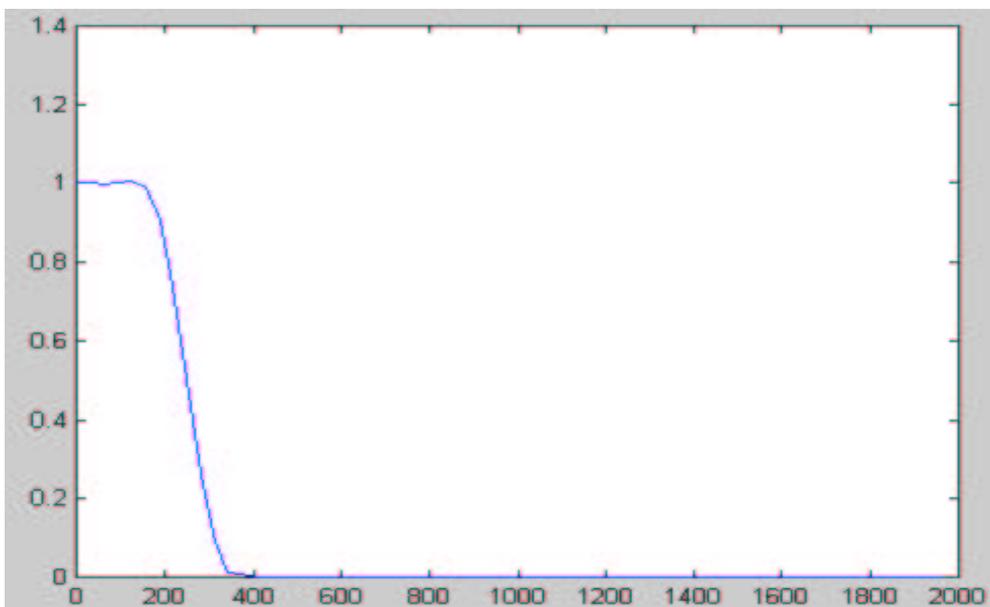
Signal filtern

Da das Zentrum der Impulsantwort in der Mitte liegt, kann die Filterlaufzeit durch anschließendes Zurückverschieben des 'Filtrats' um 512 Punkte kompensiert werden.

Abbildung 2.7: Tiefpaßfilter (htp128)



(a) Impulsantwort



(b) Übertragungsfunktion

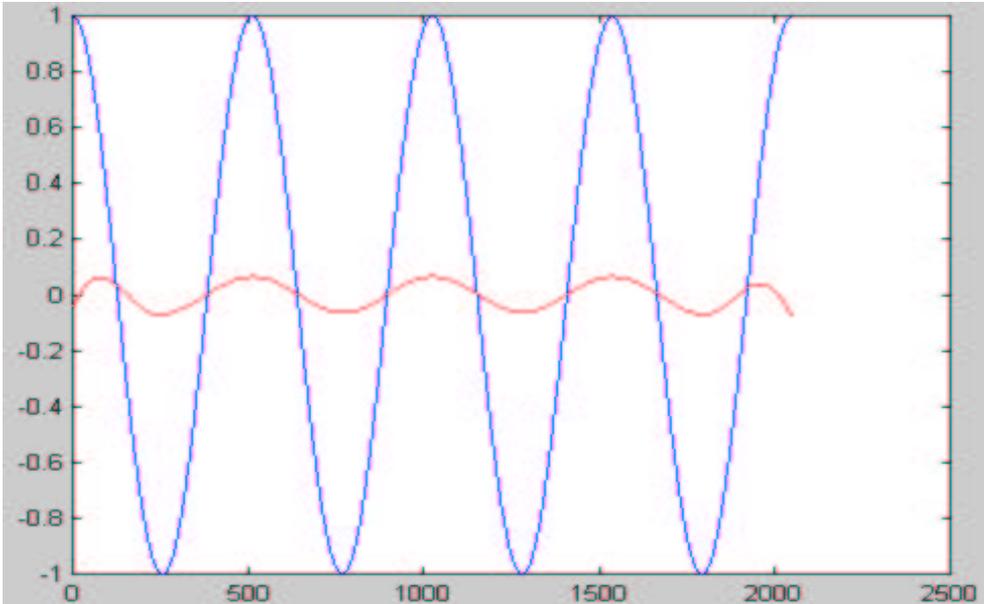
```

% demoduliertes Signal filtern
z = filter(b, a, [v , zeros(1, 511)]);
z = z(512:length(z));
% Gleichanteil entfernen
y = center(z);
plot(n,u,'b' , n,y,'r') %Vergleich im Zeitbereich
toFile("6-uy_vergleich-plot.ps");
% Betragsfrequenzgang des gefilterten Signals
bs_z = abs( fft(z,2048) );
plot(f(1:n_max) , bs_z(1:n_max) , 'b');
toFile("6-bs_z-plot.ps");

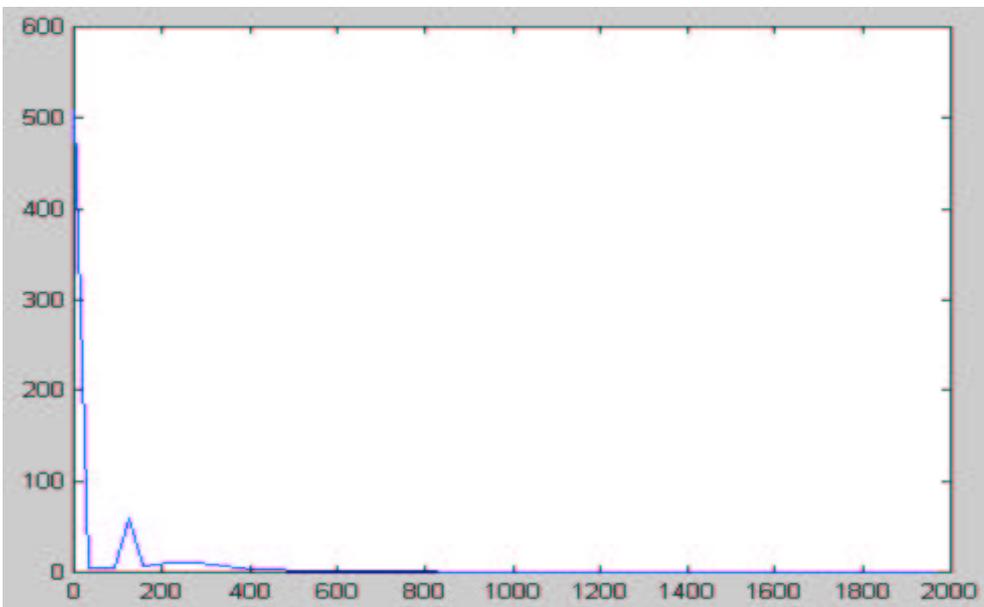
```

Das Ergebnis in Bild 2.8 zeigt, daß die Demodulation recht gut funktioniert hat. Lediglich in den Randbereichen sind Differenzen zu erkennen, die dann die Aussagekraft des Spektrums verringern. Diese Differenzen entstehen offensichtlich hauptsächlich durch die ausschnittsweise Berechnung der Signale.

Abbildung 2.8: Vergleich des demodulierten Signals mit dem Original



(a)



(b)

Abbildungsverzeichnis

1.1	Betragsspektrum eines idealen Tiefpaßfilters	2
1.2	Impulsantwort $h_{0tp}(n)$	3
1.3	Betragsspektrum Nachrichtensignal $u(n)$ und Trägersignal $c(n)$	5
1.4	Amplitudenmoduliertes Signal $u_m(n)$ im Zeit- und Frequenzbereich	8
1.5	Demoduliertes Signal $y_d(n)$ im Zeit- und Frequenzbereich	9
1.6	Tiefpaß (Rechteck-Fensterung)	11
1.7	Gefiltertes Signal $z(n)$ im Zeit- und Frequenzbereich	12
1.8	Tiefpaßfilter (Hanning-Fensterung)	14
1.9	Gefiltertes Signal $z_2(n)$ im Zeit- und Frequenzbereich	15
1.10	Betragsspektrum des asynchron demodulierten Signals $y_{d_2}(n)$ und des gefilterten Signals $z_2(n)$	16
2.1	FM-Demodulation ($50Hz$)	19
2.2	FM-Demodulation ($500Hz$)	20
2.3	Phasenverlauf $\varphi(n)$ des Nachrichtensignals für $\beta = 2$	23
2.4	Moduliertes Signal $u_m(n)$ und Nachrichtensignal $u(t)$	24
2.5	Betragsspektrum des modulierten Signals für $u_m(n)$	25
2.6	Verdeutlichung der PFM-Wandlung	26
2.7	Tiefpaßfilter (htp128)	28
2.8	Vergleich des demodulierten Signals mit dem Original	30